数理解析研究所講究録
988 巻 1997 年 16-20

On Teichmüller spaces of complex dynamics by entire functions

Tatsunori Harada and Masahiko Taniguchi
Kyoto University

1 A Teichmüller theory for entire functions

McMullen-Sullivan [10] の複素力学系に対する Teichmüller theory を entire function の場合にあてはめて、何が問題であり、知られている結果がなにを意味するかを述べる。一般論については須川さんの優れた解説が講究録 959 にあるのでそれを見られたい。

以下、f は transcendental entire function とする。The deformation space $\mathrm{Def}(\mathbf{C}, f)$ は f の invariant Beltrami differentials （すなわち

$$f^*\mu(z)\left(=\mu(f(z))\overline{f'(z)}/f'(z)\right)=\mu(z)$$

を満たす μ) の空間 $M(\mathbf{C}, f)$ の the open unit ball $M_1(\mathbf{C}, f)$ と同一視できる。

従って、たとえば次の分解定理が得られる。(一般の f に対しては更に発想の転換が必要であろう。)

Theorem 1 *Suppose that the set* $\mathrm{sing}(f^{-1})$ *of all singular values is a countable set, then*

$$\mathrm{Teich}(\mathbf{C}, f)=M_1(\hat{J}, f)\times\mathrm{Teich}(F^{fol}, f)\times\mathrm{Teich}(F^{dis}, f)$$

右辺のうち、第3項は古典的な Teichmüller theory になじむ部分である。第1項のほか、更に $\mathrm{Teich}(F^{fol}, f)$ も単純な構造をもつ。従って、最も複雑なのは $\mathrm{Teich}(F^{dis}, f)$ であり、たとえばその有限次元性などを考える事は基本的である。

問題は、 wandering domains と Baker domains が第2項と第3項の原因として顔をだすことであるが、実際さまざまな状況が起こり得る。何時これらの影響が無視できるかを見極める事が重要な課題であろう。(端的には非存在定理 (no wandering domains theorems や no Baker domains theorems) の充実だが、Teichmüller theory の立場からは次元への寄与が無ければ良いのである。)

さて $M_1(\hat{J}, f)$ についても一般にはさまざまな場合が有り得るので、まずはその非存在（あるいは有限次元性）を保証する定理が有用となる。これが No invariant line fields theorems である。

以下では、 Teichmüller spaces の有限次元性との関連で述べるが、一般的には何らかの他の規範がある方がいい。

さて、典型的な NWDT は以下のものである。

Proposition 2 *If the discrete part* $\mathrm{Teich}(F^{dis}/f)$ *is of finite dimension, then there are no eventually singular-value free, simply connected wandering domains.*

その他、multiply connected wandering domains が無いことは $J \cup \{\infty\}$ が connected であることと同値であり（[8] 参照)、the Julia set そのものが連結であれば特に multiply connected wandering domains が無い事がわかる。たとえば [3] を見よ。

また $f \in B$ なら Baker domains は持たない。さらに、$f \in C$ でもあれば、wandering domains も持たない。$f \in S$ のときも wandering domains は持たないが、その証明には Teichmüller spaces の有限次元性を使う。

Bergweiler's Conjecture Every $f \in B$ has no wandering domains.

もちろん B に属さないでも wandering domains を持たないことはある。$e^{e^z} - e^z$ も、そんな example である ([1])。

次に Baker domains は全て単連結である。また、境界が simple closed curve なら f は univalent である。さらに、 Stallard 等は、非有界成分を持たないための条件を、増大度函数を用いて与えている ([11])。

さて Teichmüller spaces の次元の評価式としては次のものが標準的である。

Proposition 3

$$\dim \mathrm{Rep}(f) \leq \#\mathrm{sing}(f^{-1}) + 2,$$

or equivalently

$$\dim \mathrm{Teich}(\mathrm{C}, f) \leq \#\mathrm{sing}(f^{-1})$$

一方 McMullen-Sullivan theory からは、つぎの結果を得る。

Theorem 4 *For $f \in B \cap C$, suppose that the number N_{AC} of foliated equivalent class of acyclic (i.e. non-periodic and non-preperiodic) singular values in the Fatou set is finite. Then*

$$\dim \mathrm{Teich}(\mathbf{C}, f) = N_{AC} + \dim M(J, f).$$

For $f \in S$,

$$\dim \mathrm{Teich}(\mathbf{C}, f) = N_{AC} + \dim M(J, f) - N_P,$$

where N_P is the number of cycles of parabolic periodic points.

特に Teich$(\mathbf{C}, f)$ が有限次元のときは NILF Theroem の、より詳しい解析ができる。(Structural instability としての NILF theorem など。)

Remark Julia set 上に invariant line fields が無い事は ergodicity を意味するわけではない。[9] を参照せよ。

一方、Teich(F^{dis}, f) の有限次元性のみでも、多くの結果が得られるであろう。(クライン群の場合には、リーマン面の Teichmüller theory との関連などから、そのような状況下での議論が十分有効であったことを想起せよ。) Teich(F^{dis}, f) の有限次元性は特に NWDT への一つの鍵である。

Theorem 5 *Suppose that $f \in EL$ and that* $\mathrm{sing}(f^{-1}) \cap F$ *is finite. Then f has no wandering domains if and only if* $\dim \mathrm{Teich}(F^{dis}, f)$ *is finite.*

Moreover, in this case,

$$\dim \mathrm{Teich}(F^{dis}, f) = N_{AC} - N_P$$

2 Examples

Example 1 Consider the 1-dimensional exponential family

$$\{f_\lambda(z) = \lambda e^z \mid \lambda \in \mathbf{C}^*\}.$$

Conjecture Those belonging to the class C are dense in the exponential family.

この予想が成り立てば、この族の全ての元に対し no invariant line fields (on the Julia sets) が成り立つ。

また同じ様な状況が、多項式 $\times\, e^z$ などの族にたいしても生じる。さらに $\lambda z^n e^z$ の様な族は、 logarithmic lifts がとれる事から、更に複雑な族への手がかりを与える。さらに、[4], [5], [6], [12] 等を見よ。

Example 2 Consider the sine family

$$\{f_{a,b}(z) = \sin(az + b)\}.$$

Theorem 6 *For an f in the sine family, suppose that $f \in C$ and two singular values have different foliated equivalence classes, then*

$$\mathrm{Teich}(\mathbf{C}, f) = \mathrm{Teich}(F^{dis}, f).$$

In particular, there are no invariant line fields on J.

最後に、logarithmic lifts を使った例を 2 つ与えておく。

Example 3 Wandering domains may contribute nothing to $\mathrm{Teich}(\mathbf{C}, f)$. Baker's example

$$f(z) = z - e^z + 1 + 2\pi i$$

gives such one. And Bergweiler's

$$f(z) = 2 - \log 2 + 2z - e^z$$

in [2] gives another.

Example 4 Baker domains also may contribute nothing to $\mathrm{Teich}(\mathbf{C}, f)$. An example is

$$f(z) = z + e^z.$$

参考文献

[1] I.N. Baker and A.P. Singh *Wandering domains in the iteration of compositions of entire functions,* Ann. Acad. Sci. Fenn., **20**, (1995), 149-153.

[2] W. Bergweiler *Invaliant domains and singularities,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **117**, (1995), 525-532.

[3] W. Bergweiler and N. Terglane *Weakly repelling fixedpoints and the connectivity of wandering domains,* Trans. A.M.S., **348**, (1996), 1-12.

[4] R.L. Devaney *Complex dynamics and entire functions,* Proc. of Symposia in Applied Math., **49**, (1994), 181-206.

[5] R.L. Devaney, L.R. Goldberg, and J.H. Hubberd *A dynamical approximation to the exponential map,* preprint, 1990.

[6] N. Fagella *Limiting dynamics for the complex standard family,* Intern. J. of Bifurcation and Chaos, **5**, (1995), 673-699.

[7] T. Harada and M. Taniguchi *On Teichmüller spaces of complex dynamics by entire functions,* to appear.

[8] M. Kisaka *On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions* to appear.

[9] C.T. McMullen *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions,* Trans. A.M.S., **300**, (1987), 329-342.

[10] C.T. McMullen and D.P. Sullivan *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system,* preprint 1995.

[11] G.M. Stallard *The iteration of entire functions of small growth,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **114**, (1993), 43-55.

[12] Z. Ye *structural instability of exponential functions,* Trans. A.M.S., **344**, (1994), 379-389.